EN BREF #2

Les propriétés des matrices

→ ? veut dire non numéroté

* Ma nomenclature: thm 1-2 veut dire le 2e théorème du chapitre 1

* A, B, C, ... seront toujours des matrices tel que les opérations (addition et multiplication) sont définies

* r se réfèrera toujours à un scalaire

1) La base

thm 2-2 p.106

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(B+C)A = BA + CA$
- $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
- $IA = AI = A$

leurs dimensions peuvent être différentes

Avertissement:

- $AB \neq BA$ nécessairement
- $AB = AC \not\Rightarrow BC$ nécessairement
- $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$ nécessairement

1.1) La transposée

thm 2-3 p.108

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(rA)^T = rA^T$
- * $(AB)^T = B^T A^T$

2) Les matrices inversibles

thm 2-6 p.114

Soient A, B inversibles

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ → Notons que cela veut dire que AB est inversible
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

De ⑨ je peux généraliser:

thm 2-? p.115

- Soient $A_1, \dots, A_n$ des matrices inversibles, donc leur produit $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ est inversible et a $A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$ comme inverse

thm 2-7 p.116

- A est inversible $\Longleftrightarrow$ $A \underset{\text{équivalente-ligne}}{\sim} I$ $\Longleftrightarrow$ La forme échelonnée réduite de A est I

thm 2-8 p.122 (Théorème de charactérisation des matrices inversibles)

- Les énoncés de a) à l) sont équivalents si on assume $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
  ↳ carré

a. A inversible
b. $A \sim I$
c. A a n pivots
d. $A\vec{x} = \vec{0}$ a $\vec{x} = \vec{0}$ comme seule solution
e. Les colonnes de A sont lin. ind.
f. L'application linéaire $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ est injective
g. Pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, $A\vec{x} = b$ a au moins une solution
h. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$
i. L'application linéaire $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ est surjective
j. il existe $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tq. $CA = I$
k. il existe $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tq. $AD = I$
l. A^T est inversible

thm 2-? p.123

- $AB = I \Rightarrow \begin{cases} A, B \text{ inversibles} \\ A^{-1} = B \\ B^{-1} = A \end{cases}$

✳ **thm utile que je ne trouve nul part:**

1) A possède une ligne ou colonne nulle
$\Rightarrow A$ non-inversible

2) A possède une ligne qui est multiple d'une autre ligne
$\Rightarrow A$ non-inversible

3) Analogue à 2) mais avec des colonnes

3) Propriétés des déterminants → Les matrices se doivent d'être carrées ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

thm 3-2 p.181

- A est une matrice triangulaire $\Rightarrow$ $\det A$ = produit des coefficients diagonaux de A

thm 3-3 p.184 & séance 4

1) $\det E_{ij}(k) = 1$
2) $\det E_{ij} = -1$
3) $\det E_i(k) = k$

où ce sont les matrices élémentaires associées aux opérateurs-lignes ainsi

$$\begin{cases} E_{ij}(k) \leftrightarrow L_{ij}(k) \\ E_{ij} \leftrightarrow L_{ij} \\ E_i(k) \leftrightarrow L_i(k) \end{cases}$$

où en fait $E_{ij}(k) = L_{ij}(k)\,I$ et c'est pareil pour les autres

On peut vérifier: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_{21}(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = E_{21}(3)$

(*) thm 3-4 p.186 & séance 4

- A inversible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$
- A non-inversible $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

thm 3-5 p.187 & séance 4

- $\det A^T = \det A$

thm 3-6 p.188 & séance 4

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

thm — Exercice #3c) des Ex. suppl. chap.3

- $\det(A^k) = (\det(A))^k$ où $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ → preuves par induction avec le thm 3-6

thm — (Je ne le trouve nul part, mais essentiel)

- Soient $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(\underbrace{A_1 \cdots A_m}_{\text{produit}}) = \underbrace{\det(A_1) \cdot \ldots \cdot \det(A_m)}_{\text{produit}}$

thm — Exercice 31 sect 3.2.

- Soit A inversible, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

thm — Exercice #3b) des Ex. suppl. chap.3 & séance 4

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, soit r, un scalaire, $\det(rA) = r^n \det(A)$